Egorov 定理

首先定义逐点收敛、一致收敛、几乎处处收敛和近一致收敛.

定义 1 (逐点收敛)**.** 对于定义在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的一列函数 $f, f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$，对每一个 $x \in D$，对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad x \in D,$$

则称函数列 $\{f_n\}$ 在 D 上**逐点收敛**于 f，记作

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad x \in D.$$

定义 2 (一致收敛)**.** 对于定义在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的一列函数 $f, f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$，对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad x \in D,$$

则称函数列 $\{f_n\}$ 在 D 上**一致收敛**于 f.

上述定义在数学分析课程中已介绍，在此回顾一下，下面介绍测度意义下的收敛.

定义 3 (几乎处处收敛)**.** 对于定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的一列广义实值函数 $f, f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$，若存在点集 $Z \subset E$，满足 $m(Z) = 0$，使得

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad x \in E \backslash Z,$$

则称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上**几乎处处收敛**于 $f(x)$，记作

$$f_n(x) \to f(x), \qquad a.e.\ x \in E.$$

定义 4 (近一致收敛)**.** 对于定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的一列可测函数 $f, f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$，若对 $\forall \delta > 0$，存在可测点集 $E_\delta \subset E$，满足 $m(E_\delta) \leqslant \delta$，使得 $f_n(x)$ 在 $E \backslash E_\delta$ 上一致收敛，则称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上**近一致收敛**于 $f(x)$.

Egorov 定理指出在测度意义下，函数列的逐点收敛与一致收敛“差不多”. 下面先给出一个引理.

引理 1. 对于定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的一列实值函数 $f, f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$，记 $\{f_n(x)\}$ 不收敛于 $f(x)$ 的点集 x 的全体组成的集合为 D，则

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \left\{ x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{k} \right\}.$$

证明. 对某不收敛点 x_0，存在 $\varepsilon_0 > 0$，对任意正整数 $N > 0$，必存在 $n > N$，使得

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_0.$$

记 $E_{N,k} = \bigcup\limits_{n=N}^{\infty} \left\{ x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \dfrac{1}{k} \right\}$，则表示 $n \geqslant N$ 时的全体不收敛点，$\bigcap\limits_{N=1}^{\infty} E_{N,k}$ 表示取遍 N 的全体不收敛点，即对每个 N，都存在不收敛点，$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}$ 覆盖所有可能的 $\varepsilon > 0$，确保包含所有不收敛点. □

定理 1 (Egorov 定理)**.** 对于定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的一列可测函数 $f, f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ 几乎处处有限，$m(E) < +\infty$，若 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$，则 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上近一致收敛于 $f(x)$.

证明. 不妨假设这些函数在 E 上处处有限. 对任意 $\delta > 0$，先构造 E_δ. 记 $f_n(x)$ 不收敛于 $f(x)$ 的点的全体组成的集合为 D，则

$$m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \left\{ x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{k} \right\} \right) \leqslant m(D) = 0.$$

记 $E_{N,k} = \bigcup\limits_{n=N}^{\infty} \left\{ x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \dfrac{1}{k} \right\}$，由递减集列测度与极限的可交换性，有

$$\lim_{N \to \infty} m(E_{N,k}) = m\left(\lim_{N \to \infty} E_{N,k} \right) = 0,$$

于是存在 N_k，使得

$$m(E_{N_k,k}) < \frac{\delta}{2^k},$$

令 $E_\delta = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_{N_k,k}$，则

$$m(E_\delta) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(E_{N_k,k}) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} = \delta.$$

下面设 $x \in E \backslash E_\delta$，对任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 k 使 $\dfrac{1}{k} < \varepsilon$. 因为 $x \notin E_{N_k,k}$，故当 $n \geqslant N_k$ 时有 $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{1}{k} < \varepsilon$. 所以函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $E \backslash E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$. □